Lista 7 - Relatividade Geral

Ricardo Antonio Mosna, novembro de 2023

Notação: nesta lista usaremos a convenção do Wald para os símbolos de Christoffel e curvatura, isto é, $\Gamma^c{}_{ab} = \frac{1}{2}\, g^{ck}\,(\partial_a g_{bk} + \partial_b g_{ak} - \partial_k g_{ab})$ e $(\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a)\,\omega_c = R_{abc}{}^d\omega_d$. Ainda, $R_{ac} = R_{abc}{}^b$ e $R = R_a{}^a$. Consideraremos unidades em que $c = 1$ e $G = 1$.

1. Resolva as equações relativísticas para uma estrela estática, esfericamente simétrica e de densidade uniforme. Mostre que a massa M e o raio R da estrela têm que satisfazer
$$\frac{M}{R} < \frac{4}{9}.$$
O que acontece se magicamente diminuirmos ligeiramente esse raio, mantendo a massa constante?

2. (Opcional) Resolva as equações relativísticas para uma estrela estática, esfericamente simétrica e de densidade dada por $\rho(r) = \rho_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$, com $r \in [0, R]$. Qual é a razão máxima $\frac{M}{R}$ tal que uma estrela com esse perfil possa existir? Provavelmente, você só conseguirá fazer este problema numericamente.

3. **O teorema de Birkhoff** A métrica de Schwarzschild é a única solução esfericamente simétrica das equações de Einstein no vácuo. Mostre isso. Dica: vimos em aula que se um espaço-tempo é esfericamente simétrico, sua métrica pode ser escrita localmente como $ds^2 = -f(t,r)dt^2 + h(t,r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \mathrm{sen}(\theta)^2 d\phi^2)$. Calcule o tensor de Ricci para essa métrica e note que $R_{tr} = 0$ implica que h só pode depender de r. Isso por sua vez implica, junto com as equações $R_{tt} = 0$ e $R_{rr} = 0$, que $f(t,r) = A(t)/h(r)$, com $A(t) > 0$. Redefinindo t de maneira a incorporar $A(t)$ ficamos então com $ds^2 = -h(r)^{-1}dt^2 + h(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \mathrm{sen}(\theta)^2 d\phi^2)$. Assim, tal métrica é não só esfericamente estática, mas também estática. Como mostramos em sala, isso implica que a solução é a de Schwarzschild.

4. Considere um observador parado nas coordenadas de Schwarzschild, digamos com coordenadas $(t, r_0, \theta_0, \phi_0)$. Mostre que, em termos do tempo próprio τ deste observador, $t = t_0 + \gamma\tau$, onde $\gamma = \left(1 - \frac{2M}{r_0}\right)^{-1}$. Mostre ainda que sua aceleração é dada por $a = \nabla_u u = \frac{M}{r_0^2}\partial_r$, onde u é a 4-velocidade. Esboce o gráfico da magnitude dessa aceleração (o que isso significa fisicamente?) em termos de r_0. Interprete.

5. Considere o espaço-tempo de Schwarzschild com coordenadas usuais. Considere a 2-superfície tipo espaço dada por $t = \text{cte}$ e $\theta = \pi/2$ (o “plano equatorial”). Essa superfície é chata?

6. (Problema 6, capítulo 3 do Carrol) Segue da solução de Schwarzschild que uma boa aproximação para métrica na superfície da Terra e nas suas vizinhanças é

$$ds^2 = -(1 + 2\Phi)dt^2 + (1 - 2\Phi)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2),$$

onde $\Phi = -GM/r$ é o potencial gravitacional Newtoniano (G é a constante de Newton e M é a massa da Terra). Ao longo do problema, assuma que $\Phi \ll 1$.

a) Imagine um relógio na superfície da Terra a uma distância R_1 do centro da Terra e um outro relógio no topo de um prédio alto a uma distância R_2 do centro da Terra. Calcule o tempo marcado por cada relógio em função do tempo coordenado t. Qual relógio é mais rápido?

b) Encontre a geodésica correspondente a um movimento circular de órbita em torno do equador da Terra ($\theta = \pi/2$). Quanto vale $d\phi/dt$?

c) Considere uma partícula massiva movendo-se radialmente na métrica de Schwarzschild. Compare as equações de movimento e discuta as condições para que se recupera a equação newtoniana correspondente. Faça o mesmo para um fóton e mostre que o resultado não tem análogo newtoniano mesmo no limite em que $r \gg GM/c^2$.

d) Quanto tempo próprio se passa para que um satélite localizado a uma distância R_1 do centro da Terra complete uma órbita? Trabalhe em primeira ordem em Φ. Substitua os valores para G, M e R_1, sem esquecer de recuperar os fatores c, para encontrar o resultado em segundos. Compare o valor com o tempo medido por um relógio estacionário na superfície da Terra.

7. (Exercício 4.3, capítulo 4 do Foster & Nightingale) Considere o espaço-tempo de Schwarzschild com coordenadas usuais e $m = GM/c^2$. Um observador estacionado em $r = r_0$ observa um sinal luminoso emitido a partir de um ponto onde $r = r_1$. O sinal viaja radialmente e é refletido por um espelho fixo em $r = r_2$, voltando ao ao seu ponto de origem em $r = r_1$. Quanto tempo demora a viagem de ida e volta de acordo com o observador em $r = r_0$? Considere $2m < r_2 < r_1 < r_0$.

8. **Buracos de minhoca** Considere o espaço-tempo de Schwarzschild com coordenadas usuais (t, r, θ, ϕ), em que

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}(\theta)^2 d\phi^2).$$

a) Mostre que é possível escrever localmente a métrica do espaço-tempo de Schwarzschild em termos das chamadas coordenadas isotrópicas, em que

$$ds^2 = -\left(\frac{1 - M/2r'}{1 + M/2r'}\right)^2 dt^2 + \left(1 + \frac{M}{2r'}\right)^4 \left[dr'^2 + r'^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\right],$$

onde r' satisfaz $r = r'(1+M/2r')^2$. As coordenadas (t, r', θ, ϕ) são chamadas coordenadas isotrópicas já que a parte espacial da métrica é uma função de r' multiplicada pela métrica euclidiana 3-dimensional que, por sua vez, não tem nenhuma direção especial.

b) A coordenada r' pode ser considerada em que intervalo de $\mathbb{R}$ para que a expressão acima seja uma solução legítima das equações de Einstein? Compare com as diferentes regiões do espaço-tempo de Schwarzschild definidas em termos de r maior, menor ou igual a $2GM$. A coordenada r' pode ser tanto tipo tempo quanto tipo espaço como a coordenada r? Não se preocupe se sua resposta não for completa; mais adiante, interpretaremos melhor essas coordenadas dentro da extensão maximal do espaço-tempo de Schwarzschild.

c) Considere a superfície equatorial bidimensional definida por $t =$ constante, $\theta =$ constante $= \pi/2$. Construa um "diagrama de mergulho" para essa superfície usando coordenadas isotrópicas. Isto é, em um espaço euclidiano plano com coordenadas $(\bar{r}, \bar{z}, \bar{\phi})$ e métrica $d\ell^2 = d\bar{r}^2 + d\bar{z}^2 + \bar{r}^2 d\bar{\phi}^2$, construa uma superfície bidimensional parametrizada por r' e θ cuja métrica induzida é

$$d\ell^2 = \left(1 + \frac{M}{2r'}\right)^4 \left(dr'^2 + r'^2 d\phi^2\right).$$

Essa superfície é um buraco de minhoca que conecta dois espaços assintoticamente planos. Analise este resultado sob a ótica da coordenada usual r.

d) Encontre uma equação $\bar{z} = \bar{z}(\bar{r})$ para a curva que, ao ser rotacionada, gera uma superfície de revolução idêntica à superfície encontrada no item anterior. Plote tal superfície de revolução.